

ΜΑΥ111: Απειροστικός Λογισμός Ι (2025-26) - Ιούνιος 2026

Ημερομηνία: 25/6/2026

Διάρκεια: 3 ώρες

1. α) Υποθέτουμε ότι  $A \subseteq (-\infty, -1)$ ,  $B \subseteq (4, +\infty)$  και ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχουν  $a \in A$  και  $b \in B$  τέτοια ώστε  $b - a < 5 + \varepsilon$ . Δείξτε τότε ότι  $\sup A = -1$  και  $\inf B = 4$ .

β) Βρείτε, αν υπάρχουν, τα  $\sup, \inf, \max$  και  $\min$  των παρακάτω συνόλων.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 - (\sqrt{2} - 1)x \leq \sqrt{2} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1 + 1 \text{ μον.})$$

2. α) Αν οι ακολουθίες  $(a_n), (b_n)$  είναι τέτοιες ώστε  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ , αποδείξτε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = +\infty$ .

β) Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια των παρακάτω ακολουθιών.

$$\alpha_n = (1 + (3n)^{-1})^n + \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}, \quad \beta_n = \sqrt[n]{n^2 + \pi^n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Αναφέρετε ρητά τα κριτήρια σύγκλισης, γνωστά όρια ή άλλα αποτελέσματα από τη θεωρία που χρησιμοποιήσατε. (1 + 1 μον.)

3. α) Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό.

β) Ορίζουμε  $a_1 = 1$  και  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Δείξτε ότι  $a_n \geq \sqrt{2}$  για κάθε  $n \geq 2$  και έπειτα εξετάστε την  $(a_n)$  ως προς τη σύγκλιση και υπολογίστε το όριό της (αν υπάρχει). (1 + 1 μον.)

4. α) Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}$  μη-κενό,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής σε κάποιο  $x_0 \in A$ , με  $g(x_0) \neq 0$ . Δείξτε ότι η  $f/g$  ορίζεται σε κάποιο διάστημα γύρω από το  $x_0$  και είναι συνεχής στο  $x_0$ .

β) Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει  $x_0 \in [0, 1]$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = x_0$ . (1 + 1 μον.)

5. α) Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} x \sin x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ . Εξετάστε την  $f$  ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα σε κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

β) Έστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, με  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . Δείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$ . (1 + 1 μον.)

6. Συγκρίνετε τους αριθμούς  $2025^{2027}$  και  $2026^{2026}$ . Ποιος είναι μεγαλύτερος; (1 μον.)

Δικαιολογήστε λεπτομερώς τις απαντήσεις σας.

**Καλή επιτυχία!**